


С. Ю. ЗАЙКОВ

# КАК РЕШАЮТСЯ В РАДИКАЛАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Томск – 2018

С. Ю. ЗАЙКОВ

# КАК РЕШАЮТСЯ В РАДИКАЛАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Томск – 2018

УДК 512.62

ББК 22.144

Зайков С.Ю. Как решаются в радикалах алгебраические уравнения пятой степени. – \ С. Зайков. – Томск, 2018. – 56 с.

В книге излагается предложенный автором способ решения в радикалах алгебраических уравнений пятой степени с рациональными коэффициентами, группа Галуа которых является циклической, метациклической или полуметациклической. Книга рассчитана на тех, кто не знаком с теорией Галуа. Основы теории Галуа даются только в той части, в которой они необходимы для решения уравнения, детально описан способ решения, показаны приемы, упрощающие решение, значительная часть книги посвящена примеру решения конкретного уравнения.

Для специалистов по теории Галуа, для студентов и аспирантов соответствующих направлений.

Рецензенты – П.А. Крылов, доктор физ.-мат. наук, профессор

Г.П. Агибалов, доктор техн. наук

ISBN 978-5-6041064-0-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что нам надо срочно решить алгебраическое уравнение пятой степени с рациональными коэффициентами, о котором мы точно знаем, что оно решается в радикалах. Тогда мы будем вынуждены открыть книги по теории Галуа, в которых описывается такие уравнения. И что же мы в них увидим?

То, что такие уравнения можно решить в радикалах, если их группа Галуа является циклической, полуметациклической или метациклической. И никаких способов их решения.

Хотя еще в 1861 году Артур Кэли вычислил резольвенту, применяя которую, решение уравнений пятой степени в радикалах является делом математически простым.

Вдобавок, в книгах по теории Галуа мы прочтем, что не существует формулы, по которой можно было бы найти решение такого уравнения. Это утверждение, хотя и правильное по существу, только вводит в заблуждение. Во-первых, создают у читателей когнитивный диссонанс – ведь если уравнения решаются в радикалах, то должны существовать формулы, а если таких формул в принципе не существует, то и в радикалах решить невозможно. Во-вторых, такие уравнения решаются не с помощью единой формулы, а с помощью алгоритма, на определенных шагах которого, и при определенных условиях, применяются различные формулы.

В этой работе описано, как решить разрешимые в радикалах алгебраические уравнения пятой степени.

Я постарался изложить материал так, чтобы знание теории Галуа не являлось для читателей обязательным. Те, кто не хочет слишком разбираться, а хочет просто решить конкретное уравнение, может попробовать начать читать с последнего параграфа с примером решения уравнения.

Решение основано на применении модели, где корни уравнения являются резольвентами Лагранжа, и применении не только резольвенты Кэли, но и еще четыре резольвент шестой степени.

В моей работе много уравнений, которые не встречаются в другой математической литературе, поскольку были выведены мной. Но вывод этих формул отсутствует, поскольку я не хотел раздувать эту работу до размеров трехтысячестраничного фолианта. Поскольку любое из этих уравнений можно выразить через корни уравнения, любой желающий может проверить их сам. Например, набрал их в Maple, задал пару команд, и сразу проверил. Ведь между проверить и вывести – очень большая разница.

Кстати, насчет проверки уравнений через корни – это шутка. Может получиться, что это вовсе не уравнения. Если не учесть, что $x_5 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4$. Проще проверять через $b_s$.

Если при наборе формул я где-то сделал опечатку, прошу сообщить мне на zaykov_tomsk@mail.ru.

Полагаю, что моя работа будет интересна не только тем, кому нужно решать уравнения, но и тем, кто интересуется теорией Галуа.

Выражаю благодарность за дружеское участие Владислава Береснева, спонсировавшего выпуск этой книги.

# Глава 1. РЕЗОЛЬВЕНТЫ ЛАГРАНЖА, КЭЛИ И ДРУГИЕ.

В § 1.1 описана модель представления корней алгебраического уравнения пятой степени в виде резольвент Лагранжа. В § 1.2 упрощенно объяснено, откуда появляются резольвенты шестой степени, и почему вопрос об известности всего лишь одного из значений любой из таких резольвент является вопросом о возможности или невозможности решить алгебраическое уравнение пятой степени. § 1.3 посвящен резольвенте Кэли. В § 1.4 даются упрощенные сведения о теории Галуа, чтобы читатели, которые ее не знают, могли понять содержимое § 1.5, в котором объясняется, почему и каким способом для всех алгебраических уравнения пятой степени с рациональными коэффициентами, разрешимыми в радикалах, можно получить одно из значений резольвенты Кэли, которая в последующих главах используется для решения уравнений в радикалах.

## § 1.1. О представлении корней алгебраических уравнений в виде резольвент Лагранжа.

Пусть

$$x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, n > 1. \quad (1.1.1)$$

Резольвента Лагранжа многим известна, в основном, по решению алгебраического уравнения третьей степени, см. [5,с.225], в виде

$$(p, x_1) = x_1 + px_1 + p^2 x_1,$$

где $p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, т.е. $p = \sqrt[3]{1}$.

Мы можем представить корни уравнения (1.1.1) в виде резольвент Лагранжа от неких $b_i$, смысл такого представления будет разъяснен позже.

Опр. 1. Первообразным корнем уравнения $p^n = 1$ называется такой $p$, что $\forall m = \overline{1, n-1}, p^m \neq 1$.

Более подробно о первообразных корнях см. [24,с.220].

Пусть для $k = \overline{1, n}$, $p^n = 1, \forall m = \overline{1, n-1}, p^m \neq 1$,

$$x_k = p^{k-1}(p^{k-1}, b_1) = \sum_{i=1}^{n-1} p^{(k-1)i} b_i. \quad (1.1.2)$$

Покажем, что возможно представить любые *n–1* корней уравнения (1.1.1) в виде (1.1.2), и найдем зависимости $b_i$ от корней уравнения.

Теорема 1 (о представлении корней уравнения через $\sqrt[n]{1}$). Пусть

$$x_k = \sum_{i=1}^{n-1} p^{(k-1)i} b_i,$$

где $k = \overline{1, n}$, $n > 1$, $p^n = 1$, $\forall l = \overline{1, n-1}$, $p^l \neq 1$, тогда

$$1).\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 0,$$

$$2).\ b_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p^{(j-1)(n-m)} x_j, \forall m = \overline{1, n-1}. \quad (1.1.3)$$

Док-во. 1). Т.к. $p^n = 1$, тогда $\forall i = \overline{1, n-1}$, $(p^i)^n = 1$, следовательно

$$\sum_{j=0}^{n-1} p^{ji} = 0.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} p^{(j-1)i} b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{j=0}^{n-1} p^{ji})\, b_i = 0.$$

2). Систему уравнений (1.1.2) без уравнения для $x_n$ можно представить в виде матричного уравнения $P_{n-1}B = X$, где

$$P_{n-1} = \begin{bmatrix} 1,1,1,\dots,1 \\ p, p^2, \dots, p^{n-1} \\ \dots \\ p^{n-2}, p^{2(n-2)}, \dots, p^{(n-1)(n-2)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Т.к. $detP_{n-1}$ является определителем Вандермонда, см. [12,с.33], [14,с.50-51], то

$$detP_{n-1} = \prod_{i>j}^{i,j=\overline{1,n-1}} (p^i - p^j).$$

Т.к. по условиям теоремы $p^n = 1$, $\forall l = \overline{1,n-1}$, $p^l \neq 1$, то $\forall i,j \in \overline{1,n-1}$, $i \neq j$, $p^i \neq p^j$, т.е. $detP_{n-1} \neq 0$, следовательно, матрица $P_{n-1}$ не вырождена. Тогда существует обратная матрица к $P_{n-1}$, см. [12,с.36-37], следовательно, решение уравнения $P_{n-1}B = X$ существует и является единственным, см. [12,с.69-71]. Следовательно, любое найденное решение будет единственным.

Покажем, что (1.1.3) является решением системы уравнений (1.1.2), подставив значения $x_i$, $i = \overline{1,n-1}$ из (1.1.2).

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p^{(j-1)(n-m)} x_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p^{(j-1)(n-m)} \sum_{i=1}^{n-1} p^{(j-1)i} b_i =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} p^{j(i-m)} b_i.$$

Пусть $i = m$, тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} p^{j(i-m)} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} 1 = 1.$$

Пусть $i \neq m$, $t = p^{i-m}$, тогда $t^n = 1$, следовательно

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} p^{j(i-m)} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} t^j = 0.$$

Но тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} p^{j(i-m)} b_i = b_m.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть

$$x_k = \sum_{i=1}^{n-1} p^{(k-1)i} b_i,$$

где $k = \overline{1, n}$, $n > 1$, $p^n = 1$, $\forall l = \overline{1, n-1}$, $p^l \neq 1$, тогда

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} (p^{(j-1)(n-m)} - p^m) x_j.$$

Док-во. Т.к.

$$x_n = -\sum_{j=1}^{n-1} x_j,$$

тогда

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} p^{(j-1)(n-m)} x_j + \frac{1}{n} p^m x_n =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} p^{(j-1)(n-m)} x_j - \frac{1}{n} p^m \sum_{j=1}^{n-1} x_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} (p^{(j-1)(n-m)} - p^m) x_j.$$

Следствие 1 доказано.

Обратите внимание, что не вырожденность матрицы Вандермонда означает, что для любых упорядоченных *n–1* корней

уравнения (1.1.1) существуют и единственны $b_i$ такие, что корни можно представить в виде (1.1.2).

В этой работе корни алгебраического уравнения пятой степени

$$x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (1.1.4)$$

представлены в виде резольвент Лагранжа следующим образом:

$$x_m = \sum_{k=1}^{4} p^{k(m-1)} b_k \,, m = \overline{1,5} \quad (1.1.5)$$

$$p^5 = 1, p = \cos(72°) + isin(72°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad (1.1.6)$$

$$b_s = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{4}(p^{(k-1)(5-s)} - p^s)x_k \,, s = \overline{1,4} \quad (1.1.7)$$

Тогда

$$x_5 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \quad (1.1.8)$$

а значения коэффициентов уравнения (1.1.4) от $b_s$:

$$\begin{cases} a_3 = -5b_1b_4 - 5b_2b_3, \\ a_2 = -5b_1^2b_3 - 5b_2^2b_1 - 5b_3^2b_4 - 5b_4^2b_2, \\ a_1 = 5b_1^2b_4^2 + 5b_2^2b_3^2 - 5b_1b_2b_3b_4 - 5b_1^3b_2 - 5b_2^3b_4 - 5b_3^3b_1 - 5b_4^3b_3, \\ a_0 = 5b_1^3b_3b_4 + 5b_2^3b_1b_3 + 5b_3^3b_2b_4 + 5b_4^3b_1b_2 - 5b_1^2b_2^2b_4 \\ -5b_1^2b_3^2b_2 - 5b_3^2b_4^2b_1 - 5b_2^2b_4^2b_3 - b_1^5 - b_2^5 - b_3^5 - b_4^5. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

## § 1.2. Секреты, блеск и нищета резольвент Лагранжа.

А зачем нам все усложнять, представляя корни алгебраического уравнения в виде резольвент Лагранжа? Ведь известно, что уравнение пятой степени нельзя свести к уравнению четвертой. И какие бы $b_s$ мы не писали, свести уравнение (1.1.4) к уравнению четвертой

степени от $b_s$ не получится. Доказано еще Лагранжем. Математически. Обжалованию в вышестоящей математической инстанции не подлежит. Никак нельзя. Совсем. Ну, разве что, если уж очень сильно захочется…

Сперва разберемся с маленькими секретами резольвент Лагранжа. Для того, чтобы их разгадать, нам надо понять свойства коэффициентов уравнения (1.1.4), описанных уравнениями (1.1.9), и догадаться, каким же образом на этих свойствах можно построить решение уравнения (1.1.4).

Давайте разложим зависимости коэффициентов от $b_s$ из (1.1.9) на более мелкие составляющие.

$$f_1 = b_1 b_4 + b_2 b_3,$$

$$f_2 = b_1^2 b_3 + b_2^2 b_1 + b_3^2 b_4 + b_4^2 b_2,$$

$$f_3 = b_1^2 b_4^2 + b_2^2 b_3^2,$$

$$f_4 = b_1 b_2 b_3 b_4,$$

$$f_5 = b_1^3 b_2 + b_2^3 b_4 + b_3^3 b_1 + b_4^3 b_3,$$

$$f_6 = b_1^3 b_3 b_4 + b_2^3 b_1 b_3 + b_3^3 b_2 b_4 + b_4^3 b_1 b_2,$$

$$f_7 = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5,$$

$$f_8 = b_1^2 b_2^2 b_4 + b_1^2 b_3^2 b_2 + b_3^2 b_4^2 b_1 + b_2^2 b_4^2 b_3. \quad (1.2.1)$$

Все функции $f_i$ имеют общие свойства: состоят из компонент произведений неотрицательных степеней $b_1, b_2, b_3, b_4$ , являются частями $a_i$, не изменяются при подстановках

$$\begin{bmatrix} \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4 \\ \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_3 \\ \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_2 \\ \mathrm{b}_4, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_1 \end{bmatrix}.$$

И у них есть еще одно важное свойство: сумма коэффициентов сомножителей из любой компоненты кратна 5. Возьмем в качестве примера $b_1^2 b_2^2 b_4$. Получим 1·2+2·2+4=10=2·5.

Но ведь эти свойства имеет любой симметричный полином от $b_i^5$! И его можно выразить через $f_i$. В том числе,

$$B_3 = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5,$$

$$B_2 = b_1^5 b_2^5 + b_1^5 b_3^5 + b_1^5 b_4^5 + b_2^5 b_3^5 + b_2^5 b_4^5 + b_3^5 b_4^5,$$

$$B_1 = b_1^5 b_2^5 b_3^5 + b_1^5 b_2^5 b_4^5 + b_1^5 b_3^5 b_4^5 + b_2^5 b_3^5 b_4^5,$$

$$B_0 = b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^5.$$

Но тогда, решая уравнение

$$y^4 - B_3 y^3 + B_2 y^2 - B_1 y + B_0 = 0$$

мы получим $b_1, b_2, b_3, b_4$, а по Лагранжу, это сделать невозможно. А доказательство Лагранжа простое и убедительное. В чем же подвох?

Подвох в том, что не все $f_i$ можно выразить через $a_i$. Не хватает пустяка. Если бы было известно любое значение из

$$V = b_1 b_2 b_3 b_4,$$

$$W = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5,$$

$$Z = b_1^5 b_2 b_3 + b_2^5 b_1 b_4 + b_3^5 b_1 b_4 + b_4^5 b_2 b_3,$$

$$Q = b_1^3 b_2^2 b_3 + b_2^3 b_4^2 b_1 + b_3^3 b_1^2 b_4 + b_4^3 b_3^2 b_2,$$

то мы могли бы, найдя взаимосвязи между этими значениями, найти остальные значения, и потом найти $B_3, B_2, B_1, B_0$. Но мы их не знаем.

А как их найти? Возьмем для примера $V$. Если мы применим подстановку $(z, z+1)$, т.е. изменим индексы $x_i$

$$\binom{12345}{23451}$$

то $b_1 \to pb_1$ , $b_2 \to p^2 b_2$ , $b_3 \to p^3 b_3$ , $b_4 \to p^4 b_4$ , но тогда $V$ не изменится, т.к. $p^{10} = 1$.

Если мы применим подстановку$(z, 2z)$, т.е. изменим индексы $x_i$:

$$\binom{12345}{24135},$$

то $b_1 \to p^3 b_3$ , $b_2 \to pb_1$ , $b_3 \to p^4 b_4$ , $b_4 \to p^2 b_2$ , но тогда $V$ не изменится, т.к. $p^{10} = 1$.

Т.к. $V$ не меняется при подстановках $(z, z+1)$, $(z, 2z)$, то не меняется и при подстановках $(z, z+a$ , $(z, bz)$ , следовательно, является метациклической функцией, см. [10,с.680].

Посмотрим, что это означает. 5 корней уравнения можно расставить по порядку 5! = 120 способами. Т.к. подстановка $(z, z+a)$ создает цикл длины 5, а подстановка $(z, bz)$, создает цикл длины 4, то $V$ остается неизменной при 5·4 = 20 расстановках корней. При других подстановках она переходит в другие функции, которые также не меняются при 20 расстановках корней. Следовательно, их $\frac{120}{20} = 6$. Назовем их $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$.

Тогда резольвента

$$\prod_{i=1}^{6} (V - V_i) = 0$$

является уравнением 6 степени с коэффициентами, которые являются симметрическими функциями от корней уравнения (1.1.4), и по теореме о симметрических функциях [5,с.124-125] могут быть выражены через коэффициенты уравнения (1.1.4).

Получается, что в зависимости от порядка, в котором мы расположим корни, $V$ может принимать 6 различных значений. Вдобавок, $W, Z, Q$ также являются резольвентами 6 степени.

Так что для решения уравнения пятой степени нужно сделать сущий пустяк – решить уравнение шестой степени.

И разорвать этот заколдованный круг: решай шестую степень вместо пятой, невозможно. Если, конечно, не подобрать к нему какой-нибудь ключик. Или хотя бы отмычку…

Мир не без добрых людей. Нашелся человек, который подарил нам отмычку.

## §1.3. Резольвента Кэли.

В 1861 году Королевское Общество в Лондоне опубликовало статью Артура Кэли, см. [30], в которой им была вычислена резольвента, названная позже его именем. Резольвента Кэли традиционно используется для проверки, является ли группа Галуа уравнения пятой степени метациклической, т.е. можно ли решить уравнение пятой степени в радикалах.

Резольвентой Кэли называется:

$$\Theta = (x_1 - x_5)(x_2 - x_5) + (x_2 - x_5)(x_3 - x_5) + (x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

$$-(x_2 - x_5)(x_4 - x_5) - (x_4 - x_5)(x_1 - x_5) - (x_1 - x_5)(x_3 - x_5). \quad (1.3.1)$$

Резольвенту Кэли можно записать и в виде:

$$\Theta = x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_4$$

$$-x_3x_5 + x_4x_5.$$

Обозначим квадрат резольвенты Кэли $\Omega$, т.е.

$$\Omega = \Theta^2. \quad (1.3.2)$$

Представим $\Omega$ в виде таблицы:

| К-т | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | К-т | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | К-т | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | +1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | +1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| +1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | +1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | +1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| +1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | +1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | +1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| +1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | -2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | -2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | +2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | -2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| -2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | +2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| -2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | -2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | -2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| +2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | -2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | -2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| +2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | +2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | -2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| -2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | +2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| -2 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | -2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | -2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| +2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| +2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | +2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | -2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| -2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | +2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | +2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| +2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | +2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | +2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Таблица 1.1.

Первый столбец таблицы содержит коэффициенты компонент, входящих в $\Omega$, остальные – соответствующие степени $x_i$. Например,

| К-т | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | К-т | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | К-т | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | +1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | +1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |

означает, что

$$\Omega = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 + \cdots,$$

| К-т | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |

означает, что в $\Omega$ входит компонента: $-2x_1^2 x_2 x_3$.

Функция $\Omega$ также, как и $V, W, Z, Q$, является метациклической функцией, значит, в зависимости от порядка расстановки корней, может принимать 6 различных значений, которые являются корнями уравнения:

$$\Omega^6 + d_5\Omega^5 + d_4\Omega^4 + d_3\Omega^3 + d_2\Omega^2 + d_1\Omega + d_0 = 0, \quad (1.3.3)$$

где

$$d_5 = -6a_3^2 - 40a_1,$$

$$d_4 = 15a_3^4 + 104a_1a_3^2 + 32a_2^2a_3 - 800a_0a_2 + 880a_1^2,$$

$d_3$ в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -20 | 0 | 0 | 0 | 6 | -16 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| -128 | 0 | 0 | 2 | 3 | +2240 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| -1472 | 0 | 2 | 0 | 2 | -192 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| -128 | 0 | 0 | 4 | 0 | +8000 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| +12800 | 1 | 1 | 1 | 0 | -8960 | 0 | 3 | 0 | 0 |

Таблица 1.2.

$d_2$ в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +15 | 0 | 0 | 0 | 8 | -176 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| +192 | 0 | 0 | 2 | 5 | -1920 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| +1440 | 0 | 2 | 0 | 4 | -960 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| +640 | 0 | 0 | 4 | 2 | -24000 | 2 | 0 | 0 | 3 |
| +19200 | 1 | 1 | 1 | 2 | -12800 | 1 | 0 | 3 | 1 |
| +1280 | 0 | 3 | 0 | 2 | -1280 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| +2560 | 0 | 1 | 4 | 0 | -160000 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| +160000 | 2 | 0 | 2 | 0 | -128000 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| +44800 | 0 | 4 | 0 | 0 | | | | | |

Таблица 1.3.

$d_1$ в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -6 | 0 | 0 | 0 | 10 | +184 | 0 | 1 | 0 | 8 |
| -128 | 0 | 0 | 2 | 7 | +320 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| -1984 | 0 | 2 | 0 | 6 | +2496 | 0 | 1 | 2 | 5 |
| -896 | 0 | 0 | 4 | 4 | -86592 | 2 | 0 | 0 | 5 |
| +43008 | 1 | 1 | 1 | 4 | -6144 | 1 | 0 | 3 | 3 |
| +1792 | 0 | 3 | 0 | 4 | -12800 | 0 | 2 | 2 | 3 |
| +8192 | 0 | 1 | 4 | 2 | -2048 | 0 | 0 | 6 | 1 |
| +857600 | 2 | 1 | 0 | 3 | -652800 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| -445440 | 1 | 2 | 1 | 2 | +414720 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| -59392 | 1 | 0 | 5 | 0 | +41472 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| -29696 | 0 | 3 | 2 | 1 | -3072 | 0 | 2 | 4 | 0 |
| +640000 | 3 | 0 | 1 | 1 | -128000 | 2 | 2 | 0 | 1 |
| -1024000 | 2 | 1 | 2 | 0 | +614400 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| -108544 | 0 | 5 | 0 | 0 | -3200000 | 4 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 1.4.

$d_0$ в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1280 | 1 | 1 | 1 | 6 | -61440 | 1 | 2 | 1 | 4 |
| +15360 | 1 | 1 | 3 | 3 | +2048000 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| +512000 | 1 | 3 | 1 | 2 | -716800 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| -12800000 | 3 | 1 | 1 | 1 | +1 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| -56 | 0 | 1 | 0 | 10 | +32 | 0 | 0 | 2 | 9 |
| -112640 | 0 | 5 | 0 | 2 | -40960 | 0 | 3 | 4 | 0 |
| -10496 | 0 | 3 | 0 | 6 | +2048 | 0 | 0 | 6 | 3 |
| +48896 | 0 | 4 | 0 | 4 | +1136 | 0 | 2 | 0 | 8 |
| +384 | 0 | 0 | 4 | 6 | -8000 | 2 | 0 | 0 | 7 |
| +16000000 | 4 | 0 | 0 | 2 | +102400 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| +4096 | 0 | 0 | 8 | 0 | +72704 | 0 | 2 | 4 | 2 |
| +18176 | 0 | 2 | 2 | 5 | -10752 | 0 | 1 | 4 | 4 |
| -640000 | 3 | 0 | 1 | 3 | -512000 | 2 | 0 | 4 | 1 |
| +10240 | 1 | 0 | 5 | 2 | -89088 | 0 | 3 | 2 | 3 |
| +204800 | 1 | 1 | 5 | 0 | +143360 | 0 | 4 | 2 | 1 |
| -28672 | 0 | 1 | 6 | 1 | -1344 | 0 | 1 | 2 | 7 |
| +160 | 1 | 0 | 1 | 8 | +2560000 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| +2560000 | 2 | 2 | 2 | 0 | -1408000 | 2 | 2 | 0 | 3 |
| +224000 | 2 | 1 | 0 | 5 | -121600 | 2 | 0 | 2 | 4 |
| +2560 | 1 | 0 | 3 | 5 | -1024000 | 1 | 4 | 1 | 0 |

Таблица 1.5.

## § 1.4. Немного о корнях, растущих на алгебраических полях.

Давайте упрощенно объясню, что в алгебре называют полем, какие из уравнений пятой степени решаются в радикалах, и при каких полях Галуа этих уравнений они решаются в радикалах. Чтобы понимать, когда и как можно воспользоваться резольвентой Кэли, как отмычкой.

Знающие азы теории Галуа могут этот параграф не читать.

Поле - это просто какое-то такое множество, что сумма, вычитание, произведение и деление двух элементов множества является элементом множества.

Возьмем множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, т.е. всех дробей от целых чисел. Сложили две дроби – дробь, вычли одну из другой – снова дробь, перемножили – опять дробь, разделили – все равно дробь. Значит, $\mathbb{Q}$ - поле.

Мы будем рассматривать только такие уравнения пятой степени, у которых все коэффициенты рациональны.

Неприводимым уравнением над полем $\mathbb{Q}$ называют такое, что его нельзя представить в виде произведения двух уравнений меньшей степени с рациональными коэффициентами.

Приводимые нам неинтересны, т.к. если их можно разделить на уравнения степени меньше 5, то никакой проблемы решить их нет.

Проверить, приводимо ли алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами, можно методом Кронекера, см. [5,122-123], но учитывая репутацию по затратам времени на этот метод, наиболее ленивые и компъютеровооруженные наверняка предпочтут сделать это за пару минут при помощи программ с символьной математикой, типа Maple.

Как и на обычном поле, на алгебраическом поле могут расти корни. Только для алгебраистов корень на алгебраическом поле – большое событие, переходящее в священнодействие.

А теперь представьте, что будет, если к полю $\mathbb{Q}$ прибавить корень $x_1$ неприводимого алгебраического уравнения $P(x) = 0$ пятой степени с рациональными коэффициентами. Для того, чтобы $\mathbb{Q}$ осталось полем, его надо расширить, т.е. добавить к нему все такие числа, которые получаются в результате всевозможных сложений, вычитаний, умножений и делений рациональных чисел и $x_1$. Тогда любой элемент нового поля $\mathbb{Q}(x_1)$, которое называют расширением поля $\mathbb{Q}$, будет иметь вид

$$\sum_{i=0}^{4} q_i x_1^i,$$

где $q_i$ - рациональные числа. Причем не могут быть равны два элемента с разными значениями $q_i$, иначе получится, что $x_1$ является корнем уравнения степени меньше 5. Значит, если раньше любой элемент откладывался на оси с рациональными коэффициентами, то теперь он определяется пятью осями с рациональными коэффициентами: $q_0$, $q_1 x_1$, $q_2 x_1^2$, $q_3 x_1^3$, $q_4 x_1^4$. Мы получили вместо одномерного пространства пятимерное. Такое увеличение размерности пространства в пять раз называется степенью расширения и обозначается $(\mathbb{Q}(x_1): \mathbb{Q}) = 5$.

Если все остальные корни $P(x) = 0$ принадлежат $\mathbb{Q}(x_1)$, то группа Галуа уравнения является циклической. Если не принадлежат, прибавим к $\mathbb{Q}(x_1)$, второй корень $x_2$. Может быть, что все элементы вновь расширенного поля $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ будут иметь вид

$$\sum_{i=0}^{4} q_{i0} x_1^i + x_2 \sum_{i=0}^{4} q_{i1} x_1^i,$$

и все остальные корни $P(x) = 0$ будут принадлежать $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$. Тогда степень расширения $(\mathbb{Q}(x_1, x_2): \mathbb{Q}) = 10$, а группа Галуа является полуметациклической. Если нет, то степень расширения $(\mathbb{Q}(x_1, x_2): \mathbb{Q}(x_1)) = 4$, $(\mathbb{Q}(x_1, x_2): \mathbb{Q}) = 20$.

Если остальные корни $P(x) = 0$ будут принадлежать $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$, то группа Галуа уравнения является метациклической. Если не принадлежат, прибавим третий корень $x_3$. Тогда степень расширения $(\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3): \mathbb{Q}) = 60$.

Есть два варианта: либо последние два корня лежат в $\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3)$, тогда группа Галуа является знакопеременной, либо нет, тогда $(\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): \mathbb{Q}) = 120$, группа Галуа является симметрической.

Уравнения с циклической, полуметациклической и метациклической группой Галуа в радикалах решаются, с знакопеременной или симметрической – не решаются.

Расширение поля, получившееся в результате присоединения к полю всех корней многочлена $P(x)$, называется полем разложения многочлена $P(x)$.

Обратите внимание на тот факт, что добавление любого корня к полю может увеличивать степень расширения только в целое число раз. Поэтому, корень неприводимого уравнения степени n может содержаться только в поле, степень расширения которого кратна n. Например, корень неприводимого уравнения степени 3 нельзя выразить в квадратных корнях, т.к. поле расширения, порождаемое ими равно степени 2, и не делится на 3.

## § 1.5. Отмычка от Артура Кэли.

На первый взгляд, изложенное в § 1.3 не дало ничего для решения уравнения пятой степени. Да, Кэли первым вычислил резольвенту шестой степени. Но его резольвента дает ровно столько же для решения уравнения, что и указанных раньше четыре резольвенты.

Вопрос не в том, какая резольвента лучше, а в ее применении. Ведь резольвента Кэли практически с момента ее публикации стала использоваться в качестве критерия, можно ли решить уравнение пятой степени в радикалах.

А если одни могут использовать резольвенту Кэли в качестве критерия разрешимости уравнения в радикалах, почему бы нам не использовать ее для того, чтобы эти уравнения в радикалах решить?

Резольвента Кэли является результатом сложения, вычитания и умножения корней уравнения (1.1.4), т.е. принадлежит к полю

разложения уравнения (1.1.4). То же самое справедливо для резольвент $V, W, Z, Q$, т.к, хотя они и были описаны в § 1.2 через корни пятой степени от 1, но на самом деле, они через них не выражаются.

Сперва посмотрим, что будет, если группа Галуа является циклической. Тогда степень расширения над полем $\mathbb{Q}$ равна 5, а это означает, что все элементы поля разложения, в том числе все корни уравнения 6 степени резольвенты Кэли, либо являются рациональными числами, либо корнями неприводимого уравнения пятой степени.

Посмотрим, что будет, если один из корней уравнения резольвенты Кэли является корнем неприводимого уравнения пятой степени. Тогда еще четыре других будут корнями того же неприводимого уравнения. А шестой корень… Шестой – лишний! Т.е. рациональное число. Т.е. при циклической группе либо один корень, либо все шесть уравнения резольвенты Кэли рациональны.

Метод нахождения рационального корня уравнения давно известен, см. [14,с.355-358], находим им одно из значений резольвенты Кэли и решаем уравнение (1.1.4).

Что будет, если группа Галуа уравнения (1.1.4) является полуметациклической или метациклической? Тогда степень расширения поля разложения уравнения равна 10 или 20. А поскольку, опять же, каждое значение резольвенты Кэли, принадлежит как полю разложения, так и является корнем уравнения 6 степени, то может быть корнем неприводимого уравнения либо степени 5, либо 4 (для метациклической группы), либо степени 2, либо рациональным числом. Поэтому, исходя только из степени расширения, получается, что есть либо рациональное значение резольвенты Кэли, и мы его находим методом из [14,с.355-358], либо уравнение резольвенты Кэли приводимо, и мы находим методом Кронекера квадратичное уравнение для двух значений резольвенты Кэли, решаем его и берем любое из значений. И затем решаем уравнение (1.1.4).

Если сперва мы исходили из общих рассуждений, только из степеней резольвенты и расширения поля, то сейчас посмотрим, что же гласит теория. Цитирую из [10,с.674]:

Теорема. *Необходимым и достаточным условием разрешимости в радикалах неприводимого уравнения простой степени является существование у уравнения Lagrange'а простого рационального корня.*

Так как уравнение квадрата резольвенты Кэли обладает свойствами вышеуказанного уравнения Lagrange'а, мы рассматриваем лишь неприводимые уравнения, и 5 является простым числом, то из вышеуказанной теоремы следует, что при разрешимости в радикалах уравнения пятой степени уравнение квадрата резольвенты Кэли имеет рациональный корень. Поэтому мы его находим методом из [14,с.355-358].

Найденное значение резольвенты Кэли и есть та отмычка, которой мы вскроем алгебраическое уравнение пятой степени.

Осталось разобраться, можно ли сделать что-то для решения уравнения со знакопеременной и симметрической группами Галуа. Увы, исходя из общих рассуждений, перспектив здесь не видать. Т.к. степени расширений 60 и 120 делятся на 6, следовательно, может иметь подполе степени 6. А значит, наши шансы найти значение резольвенты Кэли призрачны. Чтение теории развеивает и эти призрачные шансы, ибо теория Галуа гласит - уравнения со знакопеременной и симметрической группами Галуа в радикалах не решаются.

# Глава 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПО РЕЗОЛЬВЕНТЕ КЭЛИ.

В § 2.1 описана резольвента сумм пятых степеней. В § 2.2 приводится доказательство, что по единственному значению резольвенты Кэли можно найти соответствующие ему значения четырех резольвент, и показано, как это сделать. В § 2.3 доказано, что, используя значения резольвент, можно решить алгебраическое уравнение пятой степени, и показано, как получить решение.

## § 2.1. Резольвента сумм пятых степеней.

Рассмотрим уже упоминавшуюся в § 1.2 резольвенту, являющуюся суммой пятых степеней от $b_s$:

$$W = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5. \quad (2.1.1)$$

Эта резольвента имеет то замечательное свойство, что является коэффициентом уравнения четвертой степени, по которому можно найти $b_s^5$, и тем самым решить алгебраическое уравнение пятой степени. Одно из ее значений, точно так же, как с резольвентой Кэли, можно найти способом, указанным в § 1.5, и по нему одному, как с резольвентой Кэли,  также можно найти значения остальных резольвент, и решить алгебраическое уравнение пятой степени.

Сделаю лишь небольшое предупреждение. Если Вы нашли способом, указанным в § 1.5, сразу значения и $W$, и резольвенты Кэли, то эти значения могут относиться к различным расстановкам корней, поэтому находить по уравнениям взаимосвязи резольвент, указанным в § 2.2, либо значение $W$ по значению резольвенты Кэли, либо наоборот, все равно придется.

$W$ удовлетворяет уравнению шестой степени:

$$244140625W^6 + w_5W^5 + w_4W^4 + w_3W^3 + w_2W^2 + w_1W$$

$+w_0 = 0,$ (2.1.2)

где

$$w_5 = 488281250a_0 - 19531250a_2a_3,$$

$$w_4 = 3125000a_1a_3^3 - 390625a_2^2a_3^2 - 3906250a_0a_2a_3$$
$$-12500000a_1^2a_3 + 1562500a_1a_2^2 + 341796875a_0^2,$$

$w_3$ опишем в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +250000 | 1 | 0 | 0 | 5 | -250000 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| +62500 | 0 | 0 | 3 | 3 | +1500000 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| +812500 | 1 | 0 | 2 | 2 | +2000000 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| -1500000 | 0 | 1 | 3 | 1 | +250000 | 0 | 0 | 5 | 0 |
| -1562500 | 2 | 0 | 1 | 1 | -10000000 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| +13750000 | 1 | 1 | 2 | 0 | -4000000 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| +117187500 | 3 | 0 | 0 | 0 | | | | | |

$w_2$ опишем в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -10000 | 1 | 0 | 1 | 6 | +10000 | 0 | 2 | 0 | 6 |
| -625 | 0 | 0 | 4 | 4 | -20000 | 2 | 0 | 0 | 5 |
| +220000 | 1 | 1 | 1 | 4 | -122500 | 1 | 0 | 3 | 3 |
| -120000 | 0 | 3 | 0 | 4 | -20000 | 0 | 2 | 2 | 3 |
| +55000 | 0 | 1 | 4 | 2 | –10000 | 0 | 0 | 6 | 1 |
| +1250000 | 2 | 1 | 0 | 3 | +781250 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| -400000 | 1 | 2 | 1 | 2 | -300000 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| -20000 | 1 | 0 | 5 | 0 | +480000 | 0 | 4 | 0 | 2 |
| -240000 | 0 | 3 | 2 | 1 | +70000 | 0 | 2 | 4 | 0 |
| -1562500 | 3 | 0 | 1 | 1 | -5000000 | 2 | 2 | 0 | 1 |
| +6875000 | 2 | 1 | 2 | 0 | -640000 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| +21484375 | 4 | 0 | 0 | 0 | | | | | |

$w_1$ опишем в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1600 | 1 | 1 | 0 | 8 | -400 | 1 | 0 | 2 | 7 |
| -800 | 0 | 2 | 1 | 7 | +400 | 0 | 1 | 3 | 6 |
| -50 | 0 | 0 | 5 | 5 | -13600 | 2 | 0 | 1 | 6 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -16800 | 1 | 2 | 0 | 6 | +28000 | 1 | 1 | 2 | 5 |
| -5750 | 1 | 0 | 4 | 4 | +9600 | 0 | 3 | 1 | 5 |
| -12000 | 0 | 2 | 3 | 4 | +4000 | 0 | 1 | 5 | 3 |
| -400 | 0 | 0 | 7 | 2 | -14800 | 3 | 0 | 0 | 5 |
| +61200 | 2 | 1 | 1 | 4 | -76100 | 2 | 0 | 3 | 3 |
| +48000 | 1 | 3 | 0 | 4 | -49600 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| +67600 | 1 | 1 | 4 | 2 | –13600 | 1 | 0 | 6 | 1 |
| -38400 | 0 | 4 | 1 | 3 | +19200 | 0 | 3 | 3 | 2 |
| -5600 | 0 | 2 | 5 | 1 | +800 | 0 | 1 | 7 | 0 |
| +340000 | 3 | 1 | 0 | 3 | +242500 | 3 | 0 | 2 | 2 |
| -16000 | 2 | 2 | 1 | 2 | -12000 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| –14800 | 2 | 0 | 5 | 0 | +12800 | 1 | 4 | 0 | 2 |
| -198400 | 1 | 3 | 2 | 1 | +55200 | 1 | 2 | 4 | 0 |
| + 51200 | 0 | 5 | 1 | 1 | -12800 | 0 | 4 | 3 | 0 |
| -406250 | 4 | 0 | 1 | 1 | -1200000 | 3 | 2 | 0 | 1 |
| +1150000 | 3 | 1 | 2 | 0 | +160000 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| -153600 | 1 | 5 | 0 | 0 | +2031250 | 5 | 0 | 0 | 0 |

$w_0$ опишем в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +78125 | 6 | 0 | 0 | 0 | -64 | 1 | 1 | 1 | 9 |
| +1184 | 1 | 2 | 1 | 7 | -1120 | 1 | 1 | 3 | 6 |
| - 3936 | 2 | 1 | 2 | 5 | -7040 | 1 | 3 | 1 | 5 |
| +10848 | 1 | 2 | 3 | 4 | -5088 | 1 | 1 | 5 | 3 |
| + 2400 | 2 | 2 | 2 | 3 | +7480 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| +15872 | 1 | 4 | 1 | 3 | +4640 | 1 | 2 | 5 | 1 |
| +16000 | 3 | 2 | 1 | 2 | +4000 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| -35200 | 2 | 3 | 2 | 1 | -10240 | 1 | 5 | 1 | 1 |
| +2560 | 0 | 4 | 4 | 1 | -31250 | 5 | 0 | 1 | 1 |
| -100000 | 4 | 2 | 0 | 1 | +19200 | 2 | 4 | 0 | 2 |
| +62500 | 4 | 1 | 2 | 0 | -2480 | 2 | 0 | 6 | 1 |
| +24375 | 4 | 0 | 2 | 2 | +25000 | 4 | 1 | 0 | 3 |
| -9920 | 2 | 3 | 0 | 4 | +2560 | 1 | 4 | 3 | 0 |
| +10800 | 2 | 2 | 4 | 0 | -800 | 3 | 0 | 5 | 0 |
| -25600 | 2 | 5 | 0 | 0 | -320 | 0 | 3 | 6 | 0 |
| -5120 | 0 | 5 | 2 | 2 | -672 | 1 | 1 | 7 | 0 |
| -12700 | 3 | 0 | 3 | 3 | -11776 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| +10400 | 3 | 1 | 1 | 4 | -800 | 4 | 0 | 0 | 5 |
| +16 | 0 | 0 | 8 | 3 | +1 | 0 | 0 | 6 | 6 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +64 | 2 | 0 | 0 | 10 | +64 | 0 | 0 | 10 | 0 |
| -736 | 0 | 1 | 8 | 1 | +2816 | 0 | 4 | 2 | 4 |
| -4992 | 0 | 3 | 4 | 3 | +704 | 1 | 0 | 7 | 2 |
| +2992 | 0 | 2 | 6 | 2 | -2480 | 3 | 0 | 1 | 6 |
| +3984 | 2 | 2 | 0 | 6 | +1531 | 2 | 0 | 4 | 4 |
| -156 | 0 | 1 | 6 | 4 | +206 | 1 | 0 | 5 | 5 |
| -448 | 0 | 3 | 2 | 6 | +480 | 0 | 2 | 4 | 5 |
| +16 | 1 | 0 | 3 | 8 | - 8 | 0 | 1 | 4 | 7 |
| +704 | 2 | 0 | 2 | 7 | +16 | 0 | 2 | 2 | 8 |
| -832 | 2 | 1 | 0 | 8 | | | | | |

## § 2.2. Вычисление значений четырех резольвент по значению резольвенты Кэли.

Предположим, что кто-то собирался решить некое алгебраическое уравнение пятой степени с рациональными коэффициентами, разрешимое в радикалах, поэтому выполнил все рекомендации автора.

Взял уравнение (1.3.3), подставил в него значения коэффициентов своего уравнения, и получил уравнение квадрата резольвенты Кэли шестой степени для своего уравнения. Воспользовался рекомендациями автора из § 1.5 и нашел одно из значений квадрата резольвенты Кэли.

А дальше то что?

А дальше надо найти значения других четырех резольвент:

$$V = b_1 b_2 b_3 b_4, \quad (2.2.1)$$

$$W = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5, \quad (2.2.2)$$

$$Z = b_1^5 b_2 b_3 + b_2^5 b_1 b_4 + b_3^5 b_1 b_4 + b_4^5 b_2 b_3, \quad (2.2.3)$$

$$Q = b_1^3 b_2^2 b_3 + b_2^3 b_4^2 b_1 + b_3^3 b_1^2 b_4 + b_4^3 b_3^2 b_2. \quad (2.2.4)$$

Ведь, найдя значение квадрата резольвенты Кэли, мы тем самым выбрали 20 расстановок корней уравнения (1.1.4), и теперь эти резольвенты имеют не по шесть возможных значений, как раньше, а только по одному, соответствующему этим 20 расстановкам.

Но как их найти?

Посмотрим, что же такое – резольвента Кэли. Выразив корни уравнения (1.1.4) через $b_s$ (1.1.5), и подставив их в резольвенту Кэли (1.3.1), получим значение резольвенты Кэли через $b_s$:

$$\Theta = 5\sqrt{5}(b_1 b_4 - b_2 b_3). \quad (2.2.5)$$

Мы в соответствие § 1.5 уже нашли одно из значений квадрата резольвенты Кэли $\Omega$, поэтому получаем резольвенту Кэли так:

$$\Theta = \sqrt{\Omega}. \quad (2.2.6)$$

Значений квадратного корня два, мы берем в качестве резольвенты Кэли то, что нам больше понравится. Если внимательней взглянуть на (2.2.5), то видно, что выбор между этими двумя значениями – это просто выбор, что считать $b_1 b_4$, а что считать $b_2 b_3$. Т.е., какой порядок корней выбрать, а нам никакой разницы нет.

Т.к.

$$a_3 = -5b_1 b_4 - 5b_2 b_3,$$

тогда

$$b_1 b_4 = \frac{\Theta - \sqrt{5}a_3}{10\sqrt{5}}, \quad (2.2.7)$$

$$b_2 b_3 = \frac{-\Theta - \sqrt{5}a_3}{10\sqrt{5}}, \quad (2.2.8)$$

Теперь найдем $V$:

$$V = \frac{1}{100}a_3^2 - \frac{1}{500}\Theta^2. \quad (2.2.9)$$

Найти значения остальных резольвент несколько сложнее, т.к. они определяются не какими-то однозначными формулами, а из системы уравнений. Например, приходится рассматривать особые случаи, когда в уравнении возникает деление на ноль.

Прежде, чем рассмотреть первый из особых случаев, приведем несколько уравнений взаимосвязей резольвент.

$$2a_0a_3^2 - a_1a_2a_3 + 5a_2a_3V + 2a_3^2W - 5a_0a_1 - 125a_0V - 5a_1W$$

$$+50a_2Q - 50a_3Z - 625VW = 0. \quad (2.2.10)$$

Т.к. в научной литературе уравнение взаимосвязей резольвент (2.2.10) отсутствует, проверим, действительно ли оно является уравнением. Для удобства проверки запишем его несколько иначе:

$$a_0(2a_3^2 - 5a_1 - 125V) + (2a_3^2 - 5a_1 - 625V)W + (5a_2V - a_1a_2$$

$$-50Z)a_3 + 50a_2Q = 0,$$

а затем подставив значения $a_0, a_1, a_2, a_3, V, W, Q, Z$ через $b_1, b_2, b_3, b_4$ из (1.1.9), (2.2.1)-(2.2.4), получим

$$25(5b_1^3b_3b_4 + 5b_2^3b_1b_3 + 5b_3^3b_2b_4 + 5b_4^3b_1b_2 - 5b_1^2b_2^2b_4$$

$$-5b_1^2b_3^2b_2 - 5b_3^2b_4^2b_1 - 5b_2^2b_4^2b_3 - b_1^5 - b_2^5 - b_3^5 - b_4^5)(b_1^2b_4^2 + b_2^2b_3^2$$

$$+b_1^3b_2 + b_2^3b_4 + b_3^3b_1 + b_4^3b_3) + 25(b_1^2b_4^2 + b_2^2b_3^2 + b_1^3b_2 + b_2^3b_4$$

$$+b_3^3b_1 + b_4^3b_3 - 20b_1b_2b_3b_4)(b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5) + 25(b_1^4b_4^2b_3$$

$$+b_2^4b_3^2b_1 + b_3^4b_2^2b_4 + b_4^4b_1^2b_2 - b_1^4b_2^3 - b_2^4b_4^3 - b_3^4b_1^3 - b_4^4b_3^3$$

$$-3b_1^5b_2b_3 - 3b_2^5b_1b_4 - 3b_3^5b_1b_4 - 3b_4^5b_2b_3 - 3b_1^3b_3^2b_2b_4$$

$$-3b_2^3b_1^2b_3b_4 - 3b_3^3b_4^2b_1b_2 - 3b_4^3b_2^2b_1b_3)(-5b_1b_4 - 5b_2b_3)$$

$$-250(b_1^2b_3 + b_2^2b_1 + b_3^2b_4 + b_4^2b_2)(b_1^3b_2^2b_3 + b_2^3b_4^2b_1 + b_3^3b_1^2b_4$$

$$+b_4^3b_3^2b_2) = 0.$$

Аналогичным способом можно проверить и другие уравнения взаимосвязи резольвент, а также уравнения из § 2.3.

Второе уравнение опишем в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +2 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | -20 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -62500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -500 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -25 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | +50 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +1500 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | +500 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| +100 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | +750 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| +31250 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | -625 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| -2500 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -5 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +1250 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -625 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |

Таблица 2.1.

$$100a_2^2V + 100a_3^2Q + 25a_0^2 + 50a_0W - a_2^2a_3^2 - 10000QV$$

$+25W^2 = 0.$ (2.2.11)

Четвертое опишем в виде таблицы:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -5 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -5 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -200 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -5 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | +12500 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| +25 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1250 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| -50 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -500 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| +25 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | +1250 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| +250 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | +6250 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| -50 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | +31250 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Таблица 2.2.

Представим таблицей пятое уравнение:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Q$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +1 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| -5 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | +100 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| -100 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | -5 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| -100 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | +2500 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| +500 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -250 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| +250 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -7500 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| +500 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | +8750 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| -156250 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | -6250 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

Таблица 2.3.

Представим таблицей шестое уравнение:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +50 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -8000 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -4 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | +1000 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| -15 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | -125000 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| +1250 | 0 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | -12500 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| +125 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | +13750 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -200 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3750 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| +75 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | +343750 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| -50 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +5000 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| +750 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1250 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| -125 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | +6250 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| -375 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -31250 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| +250 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | +3906250 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| +875 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -31250 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Таблица 2.4.

Представим таблицей седьмое уравнение:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +2 | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -150 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | +50 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | +25 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| +250 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | -400 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| +125 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | +125 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| -2500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | |

Таблица 2.5.

Представим таблицей восьмое уравнение:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | $Z$ | $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +10 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| -5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| +50 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | +10 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| +45 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | +25 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| +25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Таблица 2.6.

Проверить уравнения взаимосвязи резольвент несложно: для этого надо вместо $a_i$ и резольвент подставить из значения через $b_s$ по формулам (1.1.9), (2.2.1)-(2.2.4).

Теорема 2. Пусть для уравнения (1.1.4) известно значение резольвенты Кэли или резольвенты $V$ (2.2.1), тогда находятся значения резольвент $W, Z, Q$ (2.2.2)-(2.2.4).

Изложенное ниже в этом параграфе является доказательством этой теоремы в несколько вольной форме. В формулировке теоремы не делается различий между известностью резольвенты Кэли и резольвенты $V$, т.к. они легко получаются друг из друга по формуле (2.2.9).

Рассмотрим

Особый случай № 1. Как найти значения резольвент при

$$V = \frac{a_3^2}{100}.$$

Тогда уравнение (2.2.11) имеет вид: $25(W + a_0)^2 = 0$, тогда

$$W = -\, a_0.$$

В этом случае уравнение в таблице 2.3 будет иметь вид

$$-\frac{1}{160}(1000\mathrm{Q} + \mathrm{a}_3^3 - 20a_1a_3)^2 = 0,$$

следовательно,

$$\mathrm{Q} \;=\; \frac{1}{50}a_1a_3 - \frac{1}{1000}\mathrm{a}_3^3.$$

Тогда уравнение (2.2.10) имеет вид $5a_3(a_0a_3 - 10\mathrm{Z}) = 0$, а уравнение в Таблице 2.1 имеет вид: $-125a_2(a_0a_3 - 10\mathrm{Z}) = 0$. Рассмотрим случай $Z \neq \frac{1}{10}a_0a_3$. Тогда $a_2 = a_3 = 0$, и уравнение в Таблице 2.2 имеет вид $a_1Z = 0$, уравнение в Таблице 2.4 имеет вид

$a_1^3 + 125a_0Z = 0$. Но т.к. мы не рассматриваем случай $a_0 = 0$, тогда $a_1 = Z = 0$, $Z = \frac{1}{10}a_0a_3$, т.е. получили противоречие. Следовательно,

$$Z = \frac{1}{10}a_0a_3.$$

Значения всех резольвент найдены, особый случай № 1 рассмотрен.

Т.к. мы знаем, как найти все резольвенты при $V = \frac{a_3^2}{100}$, то осталось выяснить, как их можно найти при $V \neq \frac{a_3^2}{100}$. В этом случае из уравнения (2.2.11) мы находим $Q$ через $W$

$$Q = \frac{100a_2^2V - a_2^2a_3^2 + 25a_0^2 + 50a_0W + 25W^2}{100(100V - a_3^2)}, \quad (2.2.12)$$

ведь деления на ноль уже не будет.

Чтобы иметь возможность найти $Z$, рассмотрим еще два особых случая.

Особый случай № 2. Как найти значения резольвент при

$$V = 0, a_3 = 0.$$

При этих условиях уравнение (2.2.11) имеет вид

$$25(W + a_0)^2 = 0,$$

следовательно,

$$W = -a_0.$$

Тогда уравнение в Таблице 2.3 имеет вид: -6250$Q^2 = 0$, т.е.

$$Q = 0.$$

Тогда уравнение в Таблице 2.1 примет вид $1250a_2Z = 0$, а уравнение в Таблице 2.2 примет вид $1250a_1Z = 0$, и если $Z \neq 0$, то $a_1 = a_2 = 0$, но тогда уравнение в Таблице 2.4 примет вид: $31250a_0Z = 0$, а случай $a_0 = 0$ в этой работе не рассматривается, следовательно,

$$Z = 0.$$

Все значения резольвент для случая № 2 найдены.

Наконец, рассмотрим

Особый случай № 3. Как найти значения резольвент при

$$V = 0, a_3 \neq 0.$$

При этих условиях, из уравнения в Таблице 2.6 получим:

$$Z = \frac{Q(a_3 a_2 - 5a_0 - 5W)}{2a_3^2},$$

а уравнение (2.2.12) будет иметь вид

$$Q = \frac{a_3^2 a_2^2 - 25a_0^2 - 50a_0 W - 25W^2}{100a_3^2}.$$

Тогда уравнение (2.2.10), если его умножить на $4a_3^3$, принимает вид:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $W$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $W$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +125 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | +375 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| +25 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | +375 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| +50 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | -5 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 |
| -20 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | +8 | 0 | 0 | 0 | 5 | 1 |
| +25 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | -5 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| -20 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 | 3 | 3 | 0 |
| -4 | 0 | 1 | 1 | 4 | 0 | +125 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +8 | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | | | | | | |

Таблица 2.7.

Поскольку коэффициент при $W^3$ не может равняться нулю, это уравнение третьей степени, и можно найти решение этого уравнения. Одно из решений будет нужным корнем резольвенты $W$.

С точки зрения теоретика значения всех резольвент найдены, случай № 3 рассмотрен полностью.

С точки зрения математиков, которым надо решить уравнение, а я пишу именно для них, во-первых, непонятно, какое именно из трех значений использовать, а подходящим является только одно, а во-вторых, вследствие решения уравнения третьей степени все эти

значения могут быть получены в непрезентабельном виде, типа синуса от чего-то там, малопригодном для дальнейшего применения, ибо в случае, когда уравнение имеет конкретный физический или математический смысл, получение его решения в виде, непригодном для понимания, чего же получили-то, значительно обесценивает смысл такого решения.

Поэтому практикам уравнение из Таблицы 2.7. напрямую я решать не советую. Можно получить другие многочлены степени 3 от $W$ из функций в Таблице 2.1 и Таблице 2.2, степени 4 из функции в Таблице 2.4, так что пользуйтесь алгоритмом Евклида. Если и это не поможет, в качестве последнего средства используйте для Алгоритма Евклида уравнение (2.1.2). Я как раз для этого и добавил § 2.1, а вовсе не для того, чтобы значение $W$ использовали в качестве исходного для поиска значений других резольвент, хотя это и возможно.

Ну, а если даже это не помогло, значит, Вам крупно не повезло, Вы использовали свой один несчастливый шанс из шестьсот тридцати семи миллиардов. Придется Вам по приближенным значениям определять, какое из значений правильное.

Поскольку рассмотрены все случаи, когда $V=0$, достаточно рассмотреть случай, когда $V\neq 0$. Тогда из уравнения в Таблице 2.5 получаем:

$$Z=\frac{1}{2500V}(2a_0a_3^3-a_1a_2a_3^2+2a_3^3W-5a_0a_1a_3-150a_0a_3V$$

$$+50a_1a_2V-5a_1a_3W+25a_2a_3Q+250a_2V^2-400a_3VW+125a_0Q$$

$$+125QW).\quad (2.2.13)$$

Подставив полученные значения $Q,Z$ , т.е. (2.2.12), (2.2.13), в уравнение в Таблице 2.3, и умножив его на $-\frac{8}{5}(100V-a_3^2)^2$, получим уравнение:

| К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ | К-т | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $V$ | $W$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +625 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | +2500 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| -350000 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | +3750 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| +7500 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 2 | +5000 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| -10000 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | -50 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| -40 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | +100 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 2 |
| -8000000 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | +2500 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -700000 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | +8 | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 1 |
| +10000 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | +200 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 |
| +240000 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | -100 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 |
| +15000 | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | -2400 | 0 | 0 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| -20000 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | -80 | 1 | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 |
| +2500000000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | +625 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +120000000 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | -50 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| -90000000 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | +100 | 2 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| -4000000 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 0 | -4000 | 0 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| +4000000 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | -200 | 0 | 0 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| -8000000 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | +800 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| +200000 | 0 | 0 | 2 | 1 | 3 | 0 | +400 | 0 | 2 | 0 | 4 | 1 | 0 |
| -350000 | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | -40 | 2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| -40000 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | +7500 | 2 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 |
| -10000 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | -2400 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 |
| +10000 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 | 0 | +16 | 0 | 0 | 0 | 8 | 1 | 0 |
| +5000 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | +20 | 0 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 |
| -7200 | 0 | 0 | 0 | 6 | 2 | 0 | +1 | 0 | 0 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| -80000 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | -160 | 0 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 |
| +240000 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | -4 | 0 | 1 | 2 | 5 | 0 | 0 |
| +44000 | 0 | 1 | 0 | 4 | 2 | 0 | +8 | 1 | 0 | 1 | 6 | 0 | 0 |
| +1210000 | 0 | 0 | 0 | 4 | 3 | 0 | | | | | | | |

Таблица 2.8.

Уравнение в Таблице 2.8 является многочленом четвертой степени от $W$ при любых значениях $V$ и $a_i$. Следовательно, его можно решить и найти его корни. Один из четырех корней будет нужным значением резольвенты $W$. Получение значений всех резольвент на основании значения резольвенты Кэли доказано, так что на этом доказательство теоремы 2 закончено.

Что касается практиков, мало обращающих внимание на теоретические изыски, рекомендую то же самое, что и при рассмотрении случая № 3. Постарайтесь обойтись без решения этого уравнения. Пользуйтесь алгоритмом Евклида!

## § 2.3. Решение алгебраического уравнения пятой степени по известным значениям резольвент.

В этом параграфе описано решение алгебраического уравнения пятой степени путем сведения его к уравнению степени четвертой. Хотя Лагранжем и доказано, что это является невозможным, но доказательство Лагранжа не может быть для нас препятствием, ибо оно действительно лишь для общего случая, у нас же случай частный.

Как упоминалось в § 1.2, мы можем решить алгебраическое уравнение пятой степени, сведя его к резольвенте четвертой степени, ведь теперь, благодаря полученному значению резольвенты Кэли, никакие резольвенты шестой степени более не являются для нас препятствием.

Теорема 3. Пусть известно значение резольвент (2.2.1)-(2.2.4), тогда алгебраическое уравнение пятой степени (1.1.4) можно свести к алгебраическому уравнению четвертой степени.

Док-во. Уравнение

$$y^4 - B_3 y^3 + B_2 y^2 - B_1 y + B_0 = 0 \quad (2.3.1)$$

имеет коэффициенты

$$B_3 = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5, \quad (2.3.2)$$

$$B_2 = b_1^5 b_2^5 + b_1^5 b_3^5 + b_1^5 b_4^5 + b_2^5 b_3^5 + b_2^5 b_4^5 + b_3^5 b_4^5, \quad (2.3.3)$$

$$B_1 = b_1^5 b_2^5 b_3^5 + b_1^5 b_2^5 b_4^5 + b_1^5 b_3^5 b_4^5 + b_2^5 b_3^5 b_4^5, \quad (2.3.4)$$

$$B_0 = b_1^5 b_2^5 b_3^5 b_4^5, \quad (2.3.5)$$

которые мы можем представить в виде

$$B_3 = W, \quad (2.3.6)$$

$$B_2 = \frac{1}{250} a_0 a_2 a_3 - \frac{1}{125} a_1 a_2^2 + \frac{1}{5} a_1 Q + \frac{1}{1250} a_2^2 a_3^2 - \frac{2}{25} a_2^2 V$$
$$+ \frac{1}{250} a_2 a_3 W + \frac{1}{5} a_2 Z - \frac{1}{25} a_3^2 Q - \frac{1}{3125} a_3^5 + \frac{1}{25} a_3^3 V - a_3 V^2, \quad (2.3.7)$$

$$B_1 = \frac{1}{625} a_3^4 Z + \frac{1}{125} a_3^3 V W - \frac{3}{25} a_3^2 V Z - \frac{2}{5} a_3 V^2 W + V^2 Z, \quad (2.3.8)$$

$$B_0 = V^5. \quad (2.3.9)$$

Теорема доказана, т.к. проверить уравнения (2.3.6)-(2.3.9), подставив в них значения $a_i$ и резольвент из (1.1.9), (2.2.1)-(2.2.4) не представляет сложности.

Следствие 1. Для того, чтобы алгебраическое уравнение пятой степени (1.1.4) можно было свести к алгебраическому уравнению четвертой степени, достаточно известности одного из значений резольвенты Кэли или резольвенты $V$. Это видно из теоремы 2.

Давайте разберемся в причинах тех сложностей, которые мешали свести алгебраическое уравнение пятой степени к уравнению (2.3.1).

Лемма 1. Коэффициенты $B_3, B_2, B_1, B_0$ уравнения (2.3.1) являются метациклическими функциями от $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$.

Док-во. По формуле (1.1.3) при $n = 5$ видно, что подстановка $(z, z+1)$ , оставляет $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$ неизменными, следовательно, подстановка $(z, z+a)$ также оставляет их неизменными. При подстановке $(z, 2z)$:

$$\binom{12345}{24135},$$

$b_1^5 \to b_3^5 \to b_4^5 \to b_2^5 \to b_1^5$ , т.е. $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$ меняются местами, следовательно, меняются местами и при подстановке $(z, bz)$, тогда любая симметрическая функция от $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$ является метациклической функцией от $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Т.к. $B_3, B_2, B_1, B_0$ являются симметрическими функциями от $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$ , то лемма доказана.

Теперь причины сложности сведения уравнения пятой степени к уравнению (2.3.1) ясны, ведь уже говорилось, такая метациклическая функция принимает шесть значений, т.е. у нас было не одно, а целых шесть уравнений (2.3.1), и найденное значение резольвенты Кэли определило, какое же из них выбрать.

Для математиков-теоретиков на этом все интересное в моей работе практически закончено, т.к. все значения коэффициентов уравнения (2.3.1) им стали известны. Возможность его решить для них очевидна. А поскольку смысл уравнения (2.3.1) заключается в том, что

$$(y - b_1^5)(y - b_2^5)(y - b_3^5)(y - b_4^5) = 0, \quad (2.3.10)$$

то, извлекая корни пятой степени из $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$, полученных при решении уравнения (2.3.1), они получат $b_1, b_2, b_3, b_4$, подставив же их в (1.1.5), получат корни уравнения (1.1.4). А раз способ решения уравнения (1.1.4) известен, что еще больше надо то?

Что касается математиков-практиков, то для них повторю то же самое, что и в § 2.2. Не надо решать уравнение (2.3.1), сводя его к уравнению третьей степени. Пользуйтесь алгоритмом Евклида!

Т.к. значения $b_1b_4$ и $b_2b_3$, уже найдены, (2.2.7) и (2.2.8), то найдем наибольшие общие делители уравнения (2.3.1) и уравнений

$$y^2 - D_1y + (\frac{\Theta - \sqrt{5}a_3}{10\sqrt{5}})^5 = 0, \quad (2.3.11)$$

$$y^2 - D_2y + (\frac{-\Theta - \sqrt{5}a_3}{10\sqrt{5}})^5 = 0, \quad (2.3.12)$$

в виде уравнений второй степени для неопределенных $D_1, D_2$, после чего найдем значения $D_1, D_2$. Тогда корнями уравнения (2.3.11) будут $b_1^5, b_4^5$, а корнями уравнения (2.3.12) будут $b_2^5, b_3^5$, а найденные алгоритмом Евклида

$$D_1 = b_1^5 + b_4^5, D_2 = b_2^5 + b_3^5.$$

Подставив в уравнения (2.3.11) и (2.3.12) найденные значения $D_1, D_2$, решим их, получив значения $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$, после чего подставить $\sqrt[5]{b_1^5}$, $\sqrt[5]{b_2^5}$, $\sqrt[5]{b_3^5}$, $\sqrt[5]{b_4^5}$ в (1.1.5) для получения решения уравнения (1.1.4) сложности не представляет.

Есть другой способ найти $b_s^5$, который не использует алгоритм Евклида, и при котором также не надо решать уравнение третьей степени. Пусть:

$$t_1 = b_1^5 + b_4^5 - b_2^5 - b_3^5, \quad (2.3.13)$$

$$t_2 = b_1^5 + b_2^5 - b_3^5 - b_4^5, \quad (2.3.14)$$

$$t_3 = b_1^5 + b_3^5 - b_2^5 - b_4^5, \quad (2.3.15)$$

Тогда $t_1, t_2, t_3$ находятся по следующим формулам:

$$t_1^2 = W^2 - \frac{2}{125}a_0a_2a_3 + \frac{4}{125}a_1a_2^2 - \frac{4}{5}a_1Q - \frac{2}{625}a_2^2a_3^2$$

$$+\frac{8}{25}a_2^2V - \frac{2}{125}a_2a_3W - \frac{4}{5}a_2Z + \frac{4}{25}a_3^2Q. \quad (2.3.16)$$

$$t_2^2 + t_3^2 = 2W^2 - \frac{2}{125}a_0a_2a_3 + \frac{4}{125}a_1a_2^2 - \frac{4}{5}a_1Q - \frac{2}{625}a_2^2a_3^2$$

$$+\frac{8}{25}a_2^2V - \frac{2}{125}a_2a_3W - \frac{4}{5}a_2Z + \frac{8}{3125}a_3^5 - \frac{8}{25}a_3^3V + \frac{4}{25}a_3^2Q$$

$$+8a_3V^2. \quad (2.3.17)$$

$$t_2^2t_3^2 = \frac{8}{5}a_3V^2W^2 - \frac{4}{5}a_1QW^2 - \frac{2}{125}a_2a_3W^3 - \frac{4}{5}a_2ZW^2$$

$$-\frac{48}{25}a_3^2VWZ + \frac{4}{25}a_3^2W^2Q + \frac{8}{25}a_2^2VW^2 + \frac{112}{3125}a_3^6V^2 - \frac{32}{25}a_3^4V^3$$

$$+\frac{8}{3125}a_3^5W^2 - \frac{2}{125}a_0a_2a_3W^2 - \frac{2}{625}a_2^2a_3^2W^2 - \frac{24}{125}a_3^3VW^2$$

$$-\frac{32}{78125}a_3^8V + \frac{16}{625}a_3^4WZ - 64V^5 + 16a_3^2V^4 + \frac{4}{125}a_1a_2^2W^2 + W^4$$

$$+\frac{16}{9765625}a_3^{10} + 16V^2WZ. \quad (2.3.18)$$

Взяв квадратный корень из выражения в (2.3.16), получим $t_1$. С плюсом он будет взят или с минусом, значения не имеет, т.к. выбор знака означает только выбор подстановки, т.е. порядка корней, что считать за $b_1^5 + b_4^5$, а что считать за $b_2^5 + b_3^5$. Решаем уравнение

$$S^2 - (t_2^2 + t_3^2)S + t_2^2t_3^2 = 0, \quad (2.3.19)$$

подставив в него значения из (2.3.17) и (2.3.18), и получим в качестве решений $t_2^2$ и $t_3^2$. Выбор, какой из корней считать за $t_2^2$, а какой за $t_3^2$, также значения не имеет, т.к. выбирает опять же подстановку корней, точнее, определяет, что считать за $b_2^5$, а что

считать за $b_3^5$. Возьмем от них квадратные корни и получим $t_2$ и $t_3$. Правильность выбора знаков квадратных корней придется проверять подстановкой в решение, т.к. ранее, вследствие выбора знака для $t_1$ и выбора между $t_2^2$ и $t_3^2$, от множества из 20 расстановок осталось всего 5 расстановок.

Т.к. $W = b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5$, то

$$t_1 + t_2 + t_3 = 4b_1^5 - (b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5) = 4b_1^5 - W, \quad (2.3.20)$$

$$t_2 - t_1 - t_3 = 4b_2^5 - (b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5) = 4b_2^5 - W, \quad (2.3.21)$$

$$t_3 - t_1 - t_2 = 4b_3^5 - (b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5) = 4b_3^5 - W, \quad (2.3.22)$$

$$t_1 - t_2 - t_3 = 4b_4^5 - (b_1^5 + b_2^5 + b_3^5 + b_4^5) = 4b_4^5 - W, \quad (2.3.23)$$

получим

$$b_1 = \sqrt[5]{\frac{t_1+t_2+t_3+W}{4}}, \quad (2.3.24)$$

$$b_2 = \sqrt[5]{\frac{t_2-t_1-t_3+W}{4}}, \quad (2.3.25)$$

$$b_3 = \sqrt[5]{\frac{t_3-t_1-t_2+W}{4}}, \quad (2.3.26)$$

$$b_4 = \sqrt[5]{\frac{t_1-t_2-t_3+W}{4}}. \quad (2.3.27)$$

Если $b_1, b_2, b_3, b_4$ найдены, то подставив их в (1.1.5), получим решение.

# Глава 3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ.

## § 3.1. Пример уравнения, упомянутого Чеботаревым.

Нам нужен учебный пример, на котором можно показать, как решаются в радикалах алгебраические уравнения пятой степени с рациональными коэффициентами. Уравнение должно удовлетворять следующим свойствам:

1). упомянуто в известной книге (во избежание подозрений, что автор подобрал специально такое, на котором метод работает, хотя в этом случае и возможны предположения, что автор стибрил чужое уравнение, чтобы самому не придумывать),

2). быть неприводимым (а какой смысл, если приводимое, его и так решить можно),

3). разрешимым в радикалах,

4). не должно быть его решение.

Уравнение, который удовлетворяет этим условиям, приведено Чеботаревым, см. [24,с.129]:

$$x^5 + 15x + 12 = 0. \quad (3.1.1)$$

Тогда

$$a_3 = 0, a_2 = 0, a_1 = 15, a_0 = 12. \quad (3.1.2)$$

## § 3.2. Вычисление значений резольвент.

Подставив значения коэффициентов из (3.1.2) в уравнение квадрата резольвенты Кэли (1.3.3), мы получили

$$\Omega^6-600\Omega^5+198000\Omega^4-30240000\Omega^3+2268000000\Omega^2$$

$$-148780800000\Omega+11664000000000. \quad (3.1.3)$$

Найти рациональное значение квадрата резольвенты Кэли можно методом, описанным у Куроша, см. [14,с.355-358], который пересказывать я не буду. Упомяну лишь, что то, что все коэффициенты уравнения (3.1.3) целые, а коэффициент при $\Omega^6$ равен 1, означает, что значение квадрата резольвенты должно быть целым, и 11664000000000 должно на него делиться. А поскольку

$$11664000000000=2^{12}3^6 5^8,$$

а метод поиска фактически сводится к перебору, то нам надо перебрать всего лишь 13·7·9 = 819 вариантов. Метод хорош тем, что гарантирует решение за конечное число шагов, и что это конечное число может очень близко приближаться к бесконечности. Очень-очень долго перебирая варианты, мы находим, что

$$\Omega=180.$$

Найдем значения других резольвент. Т.к. по уравнению (2.2.9) $V=\frac{1}{100}a_3^2-\frac{1}{500}\Omega$, то

$$V=-\frac{9}{25}.$$

Тогда уравнение (2.2.10) принимает вид $150W-360=0$, т.е.

$$W=\frac{12}{5}.$$

Уравнение (2.2.11) примет вид $3600Q+5184=0$, т.е.

$$Q=-\frac{36}{25}.$$

А уравнение в Таблице 2.5 примет вид $900Z-2592=0$, т.е.

$$Z=\frac{72}{25}.$$

§ 3.3. Решение уравнения четвертой степени.

Найдем по значениям коэффициентов и резольвент $B_0, B_1, B_2, B_3$. Тогда

$$B_3 = \frac{12}{5}, B_2 = -\frac{108}{25}, B_1 = \frac{5832}{15625}, B_0 = -\frac{59049}{9765625}.$$

Уравнение (2.3.1) имеет вид

$$y^4 - \frac{12}{5}y^3 - \frac{108}{25}y^2 - \frac{5832}{15625}y - \frac{59049}{9765625} = 0. \quad (3.2.1)$$

Т.к. $\Theta = \sqrt{\Omega}$, то пусть

$$\Theta = 6\sqrt{5}.$$

Из уравнений (2.2.7), (2.2.8) получим

$$b_1 b_4 = \frac{3}{5}, b_2 b_3 = -\frac{3}{5}.$$

Теперь найдем алгоритмом Евклида такие $D_1$ и $D_2$ , чтобы уравнение (3.2.1) делилось на уравнения

$$y^2 - D_1 y + \frac{243}{3125} = 0, \quad (3.2.2)$$

$$y^2 - D_2 y - \frac{243}{3125} = 0.$$

Умножим уравнение (3.2.2) на $y^2$ и отнимем его из уравнения (3.2.1). Получим

$$(D_1 - \frac{12}{5})y^3 - \frac{13743}{3125}y^2 - \frac{5832}{15625}y - \frac{59049}{9765625} = 0. \quad (3.2.3)$$

Умножим уравнение (3.2.2) на $(D_1 - \frac{12}{5})y$ и отнимем его из уравнения (3.2.3). Получим

$$(D_1^2 - \frac{12}{5}D_1 - \frac{13743}{3125})y^2 + (-\frac{243}{3125}D_1 - \frac{2916}{15625})y - \frac{59049}{9765625} = 0. \quad (3.2.4)$$

Умножим уравнение (3.2.2) на $D_1^2 - \frac{12}{5}D_1 - \frac{13743}{3125}$ и отнимем его из уравнения (3.2.4). Получим

$$\left(D_1^3 - \frac{12}{5}D_1^2 - \frac{13986}{3125}D_1 - \frac{2916}{15625}\right)y - \frac{243}{3125}D_1^2 + \frac{2916}{15625}D_1$$

$$+\frac{26244}{78125} = 0. \quad (3.2.5)$$

Из уравнения (3.2.5) получим уравнения

$$D_1^3 - \frac{12}{5}D_1^2 - \frac{13986}{3125}D_1 - \frac{2916}{15625} = 0, \quad (3.2.6)$$

$$\frac{243}{3125}D_1^2 - \frac{2916}{15625}D_1 - \frac{26244}{78125} = 0, \quad (3.2.7)$$

Умножив (3.2.7) на $\frac{3125}{243}D_1$, отнимем из него (3.2.6), и получим $\frac{486}{3125}D_1 + \frac{2916}{15625} = 0$, тогда

$$D_1 = -\frac{6}{5}.$$

Аналогичным образом алгоритмом Евклида находим

$$D_2 = \frac{18}{5}.$$

Следовательно, уравнение (3.2.1) является произведением уравнений

$$y^2 + \frac{6}{5}y + \frac{243}{3125} = 0, \quad (3.2.8)$$

$$y^2 - \frac{18}{5}y - \frac{243}{3125} = 0. \quad (3.2.9)$$

Решая уравнение (3.2.8), получим

$$\{b_1^5, b_4^5\} = \left\{-\frac{3}{5} + \frac{21}{125}\sqrt{10}, -\frac{3}{5} - \frac{21}{125}\sqrt{10}\right\}.$$

Решая уравнение (3.2.9), получим

$$\{b_2^5, b_3^5\} = \left\{\frac{9}{5} + \frac{72}{125}\sqrt{10}, \frac{9}{5} - \frac{72}{125}\sqrt{10}\right\}.$$

Метод получения $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$ с помощью алгоритма Евклида показал себя хорошо, прост и удобен. Посмотрим, как работает метод с $t_1, t_2, t_3$.

По формулам (2.3.16)-(2.3.18) получим $t_1^2$, $t_2^2 + t_3^2$, $t_2^2 t_3^2$.

$$t_1^2 = \frac{576}{25},\ t_2^2 + t_3^2 = \frac{144}{5},\ t_2^2 t_3^2 = \frac{1439747136}{9765625}.$$

Тогда, решая уравнение $S^2 - \frac{144}{5}S + \frac{1439747136}{9765625} = 0$, получим

$$\{t_2^2, t_3^2\} = \left\{\frac{69192}{3125}, \frac{20808}{3125}\right\}.$$

Т.к. неважно, какое из двух значений $t_1$ выбрать, то

$$t_1 = \frac{24}{5}.$$

А т.к. неважно, какое значение будет выбрано для $t_2^2$, а какое для $t_3^2$, то

$$t_2 = \pm\frac{186}{125}\sqrt{10}, t_3 = \pm\frac{102}{125}\sqrt{10},$$

т.к. неизвестно, какие из двух значений нужно выбрать для $t_2$ и $t_3$. У нас есть два возможных варианта, т.к. на самом деле нужно только установить, как соотносятся знаки $t_2$ и $t_3$. Это несложно, учитывая, что мы можем сразу это проверить, просто подставив в уравнение (3.2.1) значения $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$, полученные из формул (2.3.20)-(2.3.27):

$$b_1^5 = \frac{t_1+t_2+t_3+W}{4}, b_2^5 = \frac{t_2-t_1-t_3+W}{4}, b_3^5 = \frac{t_3-t_1-t_2+W}{4}, b_4^5 = \frac{t_1-t_2-t_3+W}{4}.$$

Из подстановок в уравнение (3.2.1) сразу будет видно, что $t_2, t_3$ должны иметь одинаковые знаки, иначе $\frac{t_1+t_2+t_3+W}{4}$ не будет корнем уравнения (3.2.1), при одинаковых знаках будут принимать значения $\frac{9}{5}+\frac{72}{125}\sqrt{10}$ и $\frac{9}{5}-\frac{72}{125}\sqrt{10}$, что соответствует и $\frac{t_1-t_2-t_3+W}{4}$. То, что это $b_1^5, b_4^5$, а при методе с алгоритмом Евклида мы определили их как $b_2^5, b_3^5$, не должно нас смущать, т.к. при втором методе резольвенту Кэли мы не использовали.

При обоих положительных знаках $\frac{t_2-t_1-t_3+W}{4}$ совпало с корнем уравнения (3.2.1) $-\frac{3}{5}+\frac{21}{125}\sqrt{10}$, $\frac{t_3-t_1-t_2+W}{4}$ совпало с $-\frac{3}{5}-\frac{21}{125}\sqrt{10}$.

Вывод: метод с $t_1, t_2, t_3$ показал себя хорошо, наличие двух возможных твариантов хорошо компенсируется возможностью их проверки подстановкой значений в уравнение (3.2.1).

## § 3.4. Подбор значений резольвент Лагранжа.

Решением уравнения (3.2.1) решение уравнения (1.1.4) может считаться законченным только для теоретиков, для практиков оно будет считаться оконченным только тогда, когда мы определим, какие корни уравнения (3.2.1) считать каким из $b_1^5, b_2^5, b_3^5, b_4^5$, и какое из пяти возможных значений принимает каждое из $b_1, b_2, b_3, b_4$.

В § 1.2 было упомянуто свойство суммы коэффициентов сомножителей из любой компоненты быть кратной 5. Именно из него и предлагается исходить.

При помощи резольвенты Кэли мы уже выбрали, какие два корня уравнения (3.2.1) считать $b_1, b_4$ и нам нет разницы, какой из них $b_1$, а какой $b_4$. Поэтому будем считать, что

$$b_1^5 = -\frac{3}{5} + \frac{21}{125}\sqrt{10},\ b_4^5 = -\frac{3}{5} - \frac{21}{125}\sqrt{10}.$$

Давайте посмотрим, при каких $t_1, t_2, t_3$ мы выбрали бы эти $b_1^5, b_4^5$. При таком выборе

$$t_1 = -\frac{24}{5},\ t_2 = \frac{186}{125}\sqrt{10},\ t_3 = -\frac{102}{125}\sqrt{10},$$

но тогда

$$b_2^5 = \frac{9}{5} + \frac{72}{125}\sqrt{10},\ b_3^5 = \frac{9}{5} - \frac{72}{125}\sqrt{10}.$$

Т.к. $b_1$ и $b_2$ могут принимать по пять различных значений, а $b_3$ и $b_4$ зависят от них, получаем 25 различных вариантов. Чтобы их сократить до 5, надо найти зависимость, например, между $b_1$ и $b_3$. Найдем значение

$$u = b_1^2 b_3.$$

Сделаем замены переменных

$$b_4 = \frac{3}{5b_1},\ b_3 = \frac{u}{b_1^2},\ b_2 = -\frac{3b_1^2}{5u}.$$

Тогда если умножить на $-25b_1^5u^2$ уравнение для $a_2$ из (1.1.9), оно, с учетом $a_2 = 0$, будет иметь вид

$$75u^4 + 125b_1^5u^3 - 27b_1^5u + 45b_1^{10} = 0. \quad (3.4.1)$$

А если умножить на $-125b_1^5u^3$ уравнение для $a_1$ из (1.1.9), оно, с учетом $a_1 = 15$, будет иметь вид

$$135u^4 + 1200b_1^5u^3 - 375b_1^{10}u^2 + 625(u^5)u - 81b_1^{10} = 0. \quad (3.4.2)$$

Если умножить уравнение (3.4.2) на 5 и отнять из него уравнение (3.4.1), умноженное на 9, то получим

$$4875b_1^5u^3 - 1875b_1^{10}u^2 + 3125(u^5)u + 243b_1^5u - 810b_1^{10} = 0. \quad (3.4.3)$$

Умножим уравнение (3.4.1) на $65b_1^5$ и отнимем из него уравнение (3.4.3), умноженное на $u$, и получим

$$10000b_1^{10}u^3 - 3125(u^5)u^2 - 243b_1^5u^2 - 945b_1^{10}u$$

$$+2925b_1^{15} = 0. \quad (3.4.4)$$

Умножим уравнение (3.4.3) на $80b_1^5$ и отнимем из него уравнение (3.4.4), умноженное на 39, и получим

$$(121875(u^5) + 9477b_1^5 - 150000b_1^{15})u^2 + 250000b_1^5(u^5)u$$

$$+56295b_1^{10}u - 178875b_1^{15} = 0. \quad (3.4.5)$$

Умножим на $121875(u^5) + 9477b_1^5 - 150000b_1^{15}$ уравнение (3.4.3) и отнимем из него уравнение (3.4.5), умноженное на $4875b_1^5u$, и получим

$$(281250000b_1^{25} - 292207500b_1^{15} - 1447265625b_1^{10}(u^5))u^2$$
$$+(835565625b_1^{20} - 468750000b_1^{15}(u^5) + 2302911b_1^{10}$$
$$+59231250b_1^5(u^5) + 380859375(u^{10}))u + 121500000b_1^{25}$$
$$-7676370b_1^{15} - 98718750b_1^{10}(u^5) = 0. \quad (3.4.6)$$

Умножим на

$$281250000b_1^{25} - 292207500b_1^{15} - 1447265625b_1^{10}(u^5)$$

уравнение (3.4.5) и отнимем из него уравнение (3.4.6), умноженное на $121875(u^5) + 9477b_1^5 - 150000b_1^{15}$, и получим

$$(141167812500000b_1^{35} - 24023039990625b_1^{25}$$
$$-243033222656250b_1^{20}(u^5) - 247558593750000b_1^{15}(u^{10})$$
$$-21824687547b_1^{15} - 842001834375b_1^{10}(u^5)$$
$$-10828212890625b_1^{5}(u^{10}) - 46417236328125(u^{15}))u$$
$$-32083593750000b_1^{40} + 49965705562500b_1^{30}$$
$$+229264013671875b_1^{25}(u^5) + 72748958490b_1^{20}$$
$$+1871115187500b_1^{15}(u^5) + 12031347656250b_1^{10}(u^{10}) = 0. \quad (3.4.7)$$

Получим значение

$$u^5 = b_1^{10}b_3^5 = \frac{36207}{15625} - \frac{286254}{390625}\sqrt{10}, \quad (3.4.8)$$

тогда уравнение (3.4.7), если подставить в него значения $u^5$ и $b_1^5$, принимает вид

$$\frac{1876084232690017233}{3125}u - \frac{2966349411950720679}{15625}\sqrt{10}u$$
$$-\frac{6373745643375890664 3}{78125} + \frac{4031110726398453087}{15625}\sqrt{10} = 0, \quad (3.4.10)$$

Тогда

$$u = b_1^2 b_3 = \frac{3}{5} - \frac{6}{25}\sqrt{10}.$$

Выразим $b_1, b_3, b_4$ через $b_2$.

$$b_3 = -\frac{3}{5b_2} = -\frac{3b_2^4}{5b_2^5} = \left(\frac{125}{9} - \frac{40}{9}\sqrt{10}\right)b_2^4, \quad (3.4.11)$$

$$b_2 = -\frac{3}{5b_3} = -\frac{3b_1^2}{5u},$$

тогда

$$b_1 = -\frac{125u^3}{27b_1^5}b_2^3 = \left(5 - \frac{5}{3}\sqrt{10}\right)b_2^3. \quad (3.4.12)$$

$$b_4 = \frac{3}{5b_1} = \frac{3}{5(5-\frac{5}{3}\sqrt{10})b_2^3} = \frac{3b_2^2}{5(5-\frac{5}{3}\sqrt{10})b_2^5} = \left(\frac{1}{3}\sqrt{10} - \frac{5}{3}\right)b_2^2. \quad (3.4.13)$$

Выражая все коэффициенты $a_i$ в формулах (1.1.9) через $b_2$, т.е. выражая $b_1, b_3, b_4$ через $b_2$ по формулам (3.4.11)-(3.4.13), тогда $a_i$ будут выражениями от $b_2^5$. Подставив в них значения $b_2^5$, получаем, что значения $a_i$ совпадают со значениями $a_i$ в (3.1.2), т.е. соответствуют уравнению (3.1.1).

Т.к. $b_2 = \sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72}{125}\sqrt{10}}$, то это означает, что какое бы из 5 значений $\sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72}{125}\sqrt{10}}$ мы не взяли, то если $b_1, b_3, b_4$ будут соответствовать (3.4.11)-(3.4.13), то $b_1, b_2, b_3, b_4$ будут соответствовать решению уравнения.

Таким образом, значения $b_1, b_2, b_3, b_4$ найдены, чтобы в явном виде получить корни уравнения (3.1.1), достаточно подставить эти значения в (1.1.5). Т.к.

$$b_2 = \sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72}{125}\sqrt{10}},$$

то для избежания путаницы, возьмем в качестве $b_2$ действительное значение $\sqrt[5]{\frac{9}{5} + \frac{72}{125}\sqrt{10}}$. Тогда, чтобы не загромождать запись, напишем значения корней через $b_2$, имея в виду вышеуказанное действительное значение:

$x_1 = (5 - \frac{5}{3}\sqrt{10})b_2^3 + b_2 + (\frac{125}{9} - \frac{40}{9}\sqrt{10})b_2^4 + (\frac{1}{3}\sqrt{10} - \frac{5}{3})b_2^2,$

$x_2 = p(5 - \frac{5}{3}\sqrt{10})b_2^3 + p^2 b_2 + p^3(\frac{125}{9} - \frac{40}{9}\sqrt{10})b_2^4 + p^4(\frac{1}{3}\sqrt{10} - \frac{5}{3})b_2^2,$

$x_3 = p^2(5 - \frac{5}{3}\sqrt{10})b_2^3 + p^4 b_2 + p(\frac{125}{9} - \frac{40}{9}\sqrt{10})b_2^4 + p^3(\frac{1}{3}\sqrt{10} - \frac{5}{3})b_2^2,$

$x_4 = p^3(5 - \frac{5}{3}\sqrt{10})b_2^3 + p b_2 + p^4(\frac{125}{9} - \frac{40}{9}\sqrt{10})b_2^4 + p^2(\frac{1}{3}\sqrt{10} - \frac{5}{3})b_2^2,$

$x_5 = p^4(5 - \frac{5}{3}\sqrt{10})b_2^3 + p^3 b_2 + p^2(\frac{125}{9} - \frac{40}{9}\sqrt{10})b_2^4 + p(\frac{1}{3}\sqrt{10} - \frac{5}{3})b_2^2,$

где $p = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Подставив $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ в уравнение

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = 0,$$

получили $x^5 + 15x + 12 = 0$.

Уравнение решено правильно.

# Список литературы:

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука. Физматлит, 1979. – 512 с.

2. *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. М.:МЦНМО, 2001. – 192 с.

3. *Артин Э.*, Теория Галуа, М.: МЦНМО, 2004. – 66 с.

4. *Валуцэ И.И.* Отображения. Алгебраические аспекты теории. Кишинев, «Штиинца», 1976.

5. *Ван дер Варден* Алгебра, М.: Наука, 1976. – 648 с.

6. *Ван дер Варден* Современная алгебра, Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1947.

7. *Ван дер Варден* Современная алгебра, Ч. 2. М.: ОНТИ НКТП, 1937.

8. *Винберг Э.Б.* Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1980.

9. *Винберг Э.Б.* Начала алгебры. М.: МЦНМО, МК НГУ, «УРСС», 1988. – 192 с.

10. *Граве Д.А.* Элементы высшей алгебры. Киев, 1914.

11. *Гудков К. Ю., Лурье Б. Б.* Циклические расширения Галуа для уравнений 5-й степени, Зап. научн. сем. ПОМИ, 2016, том 443, 78–90.

12. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра, М.: Наука. Физматлит, 1999, 296 с.

13. *Клейн Ф.* Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука. Физматлит, 1989.

14. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, Физматлит, 1968.

15. *Курош А.Г.* Теория групп. М.: Наука, Физматлит, 1967.

16. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.

17. *Лурье Б.Б., Гладких М.Б.* О неразрешимости в радикалах некоторого класса уравнений пятой степени. Зап. научн. сем. ПОМИ, 2003, том 305, 163–164.

18. *Постников М.М.* Основы теории Галуа. М.: Физматгиз, 1960.

19. *Постников М.М.* Теория Галуа. М.: Физматлит, 1963.

20. *Прасолов В.В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.

21. *Прасолов В.В., Соловьев Ю.П.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: «Факториал», 1997. – 288 с.

22. *Хованский А.Г.* Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: МЦНМО, 2008. – 296 с.

23. *Чеботарев Г. Н.* К проблеме резольвент. Учен. зап. Казан. ун-та., 1954, том 114, книга 2, 189–193.

24. *Чеботарев Г. Н.* Основы теории Галуа, Ч. 1. Ленинград: Государственное технико-теоретическое издательство, 1934.

25. *Чеботарев Г. Н.* Основы теории Галуа, Ч. 2. Ленинград: Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937.

26. *Чеботарев Г. Н.* Теория алгебраических функций. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1948.

27. *Чеботарев Г. Н.* Теория Галуа. М.: Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1936.

28. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. Ижевск.: Ижевская республиканская типография, 1999. – 348 с.

29. *Adamchik V. S., Jeffrey D. J.* Polynomial Transformations of Tschirnhaus, Bring and Jerrard; ACM SIGSAM Bulletin, Vol 37, No. 3, September 2003, p 90-94.

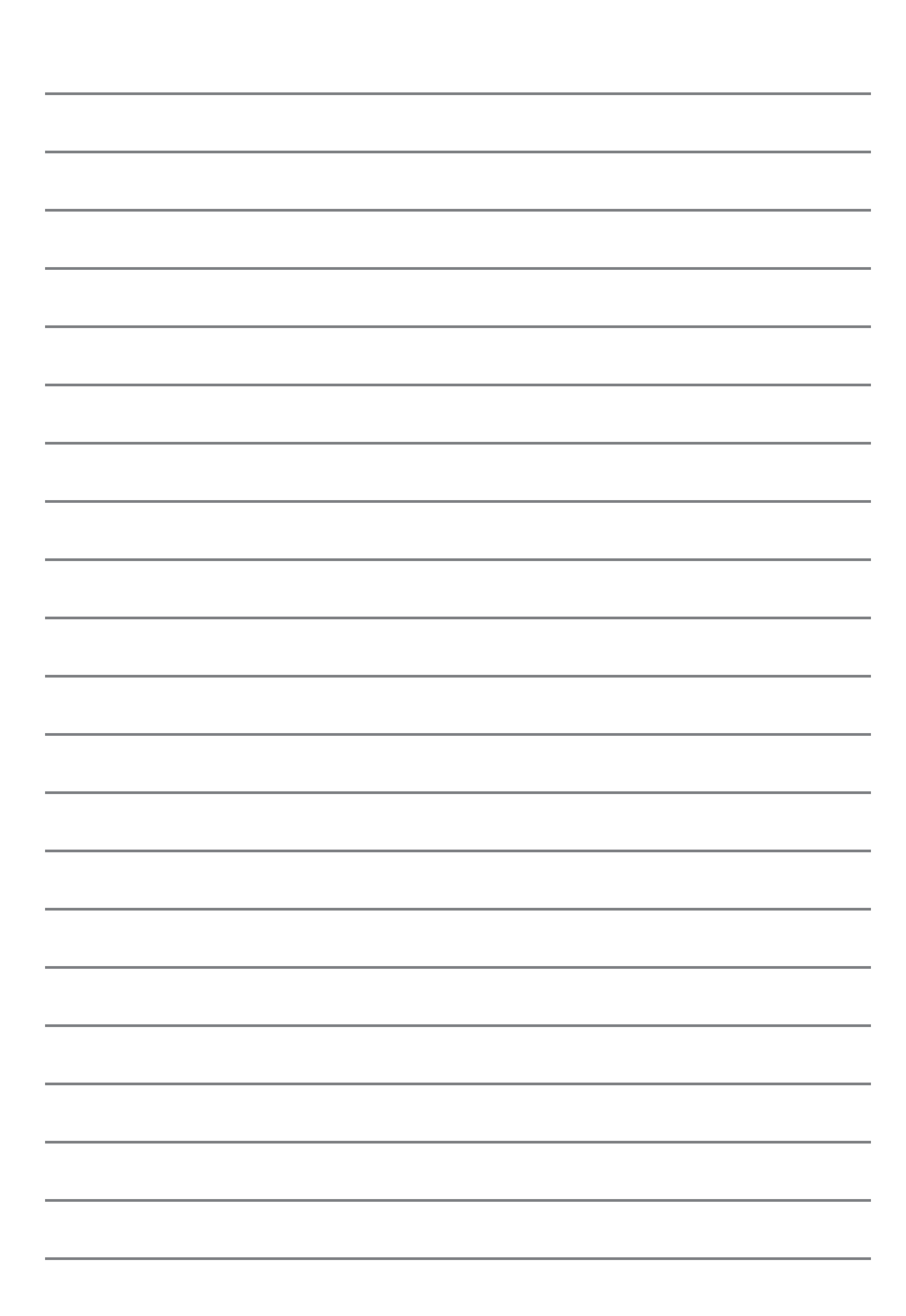
30. *Cayley A*. On a New Auxiliary Equation in the Theory of Equations of the Fifth Order. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 151 (1861), pp. 263-276.

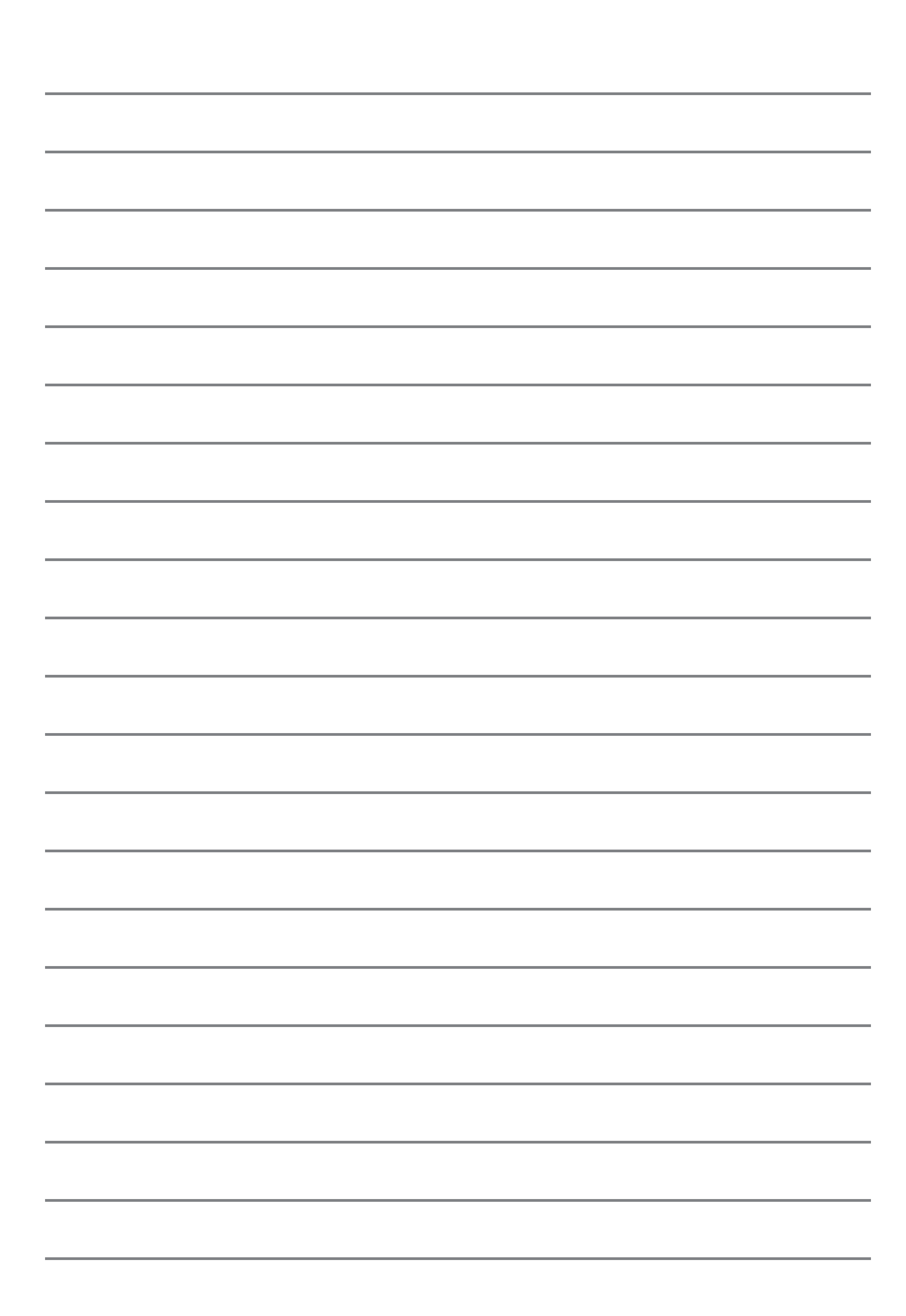
31. *Jerrard G. B.* An essay on the resolution of equations, London: Taylor and Francis, 1859.

32. *Mathews G.B*. Algebraic equations. Cambridge: at the University Press, 1907.

33. *Reid M*. MA3D5 Galois theory. 2014.

# Для заметок





Научное издание.

# Как решаются в радикалах алгебраические уравнения пятой степени

*С.Ю. Зайков*

Гарнитура «Times»
Формат 60×90/16 Усл. печ. л. 3,5
Тираж 500 экз.
Заказ № 1826. Подписано в печать 25.04.2018
Отпечатано в типографии «Демос»,
634003 Томск, ул. Пушкина, 22-30, тел. 65-97-79